

Title	MartingaleにおけるGarnett-Jonesの定理と(Ap)条件(マルチンゲールとその周辺)
Author(s)	風巻, 紀彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 491: 158-170
Issue Date	1983-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/103528
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Martingale における Garnett-Jones の 定理と (A_p) 条件

富山大・理 風巻 紀彦 (Norihiko Kazamaki)

§ 1. BMO-martingale

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; (\mathcal{F}_t))$ を通常の条件を満たす確率系とする。本稿では、さらに (\mathcal{F}_t) に束する martingale の sample continuity を仮定して論ずる。簡単のため, uniformly integrable martingales の全体を \mathcal{M}_u , 有界な martingales の全体を H_∞ で表そう。

次に $M \in \mathcal{M}_u$, $1 \leq p < \infty$ に対し

$$\|M\|_{BMO_p} = \sup_t \|E[|M_\infty - M_t|^p | \mathcal{F}_t]\|_\infty^{1/p}$$

とおく。特に, M が L^2 -有界のとき, $M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_u$ に注意すれば, $\|M\|_{BMO_2} = \sup_t \|E[\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t | \mathcal{F}_t]\|_\infty^{1/2}$ となる。

補題 1 (John-Nirenberg 型の不等式)

$$\|M\|_{BMO_1} < \frac{1}{4} \implies E[\exp\{|M_\infty - M_t|\} | \mathcal{F}_t] \leq \frac{1}{1 - 4\|M\|_{BMO_1}}$$

証明は, Dellacherie-Meyer ([1], p.193) を参照せよ。

最初に基本的な注意を与えよう。 $\|M\|_{BMO_1} < \infty$ のとき, $N \equiv M / (8\|M\|_{BMO_1})$ に対し補題を用いれば

$$\exists C_p > 0 : \|M\|_{BMO_p} \leq C_p \|M\|_{BMO_1}.$$

従って, Jensen の定理から, $\|M\|_{BMO_1} \leq \|M\|_{BMO_p}$ がある。従って

$$\|M\|_{BMO_1} \leq \|M\|_{BMO_p} \leq C_p \|M\|_{BMO_1} \text{ である。以後, } \|M\|_{BMO} \equiv \|M\|_{BMO_1}$$

$$BMO \equiv \{M \in \mathcal{M}_u : \|M\|_{BMO} < \infty\} \text{ とする。定義より, } H_\infty \subset BMO.$$

例 1 $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ を 1 次元の Brownian Motion ($B_0 = 0$) とし, $M_t = B_{t \wedge 1}$ とおく。このとき, $M \notin H_\infty$ 。然し, $\langle M \rangle_t = t \wedge 1$ 故から $\|M\|_{BMO_2} = 1$ 。従って, $M \in BMO \setminus H_\infty$ 。

BMO における H_∞ の性格について, 例えば次の結果が知られている。

定理 1 (Dellacherie-Meyer-Yor [2]) $BMO \setminus H_\infty \neq \emptyset$ ならば, H_∞ は closed でも dense でもない。

これに関連して筆者が問題としたのは, BMO -martingale M に関する或る種の性質について, そのが成立するか否かは M と H_∞ の距離に依存して決まるのではないか? ということである。その性質として本稿では (A_p) 条件を考えてみたい。

§2. (A_p) 条件と逆向き Hölder の不等式

定数 α に対し, $Z_t^{(\alpha)} = \exp\{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2} \langle M \rangle_t\}$ ($0 \leq t < \infty$) とおき, 時に $Z^{(1)}$ を Z で表すこととする。

定義 1 $1 < p < \infty$ とする。

$$(A_p) \quad \sup_t \left\| E\left[\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \right\|_\infty < \infty$$

がなりたつとき, Z は (A_p) 条件をみたすという。時に $Z_t/Z_\infty \leq C$ のとき, (A_1) 条件をみたすという。また, 不等式

$$(R_p) \quad E[Z_\infty^p | \mathcal{F}_t] \leq C_p Z_t^p \quad (0 \leq t < \infty)$$

を逆向き Hölder の不等式という。

Z が $(A_p), (R_p)$ をみたすことを, それぞれ $Z \in (A_p), Z \in (R_p)$ とかくことにしよう。 $1 < r < R < \infty$ のとき, $(A_r) \implies (A_R)$. 他方 $(R_R) \implies (R_r)$ である。また,

$$M \in \text{BMO} \iff Z \in (A_p) \text{ for some } p > 1$$

が知られている ([6])。

一般の $M \in \mathcal{M}_u$ に対しては, Z は local martingale であって, $E[Z_\infty] \leq 1$ となるが, 必ずしも $Z \in \mathcal{M}_u$ とは限らない。

然し $M \in \text{BMO}$ の場合は, Jensen の定理により, 任意の stopping time T に対して

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{Z_\infty}{Z_T} \mid \mathcal{F}_T\right] &= E\left[\exp\left\{(\mathcal{M}_\infty - \mathcal{M}_T) - \frac{1}{2}(\langle \mathcal{M} \rangle_\infty - \langle \mathcal{M} \rangle_T)\right\} \mid \mathcal{F}_T\right] \\
&\geq \exp\left\{-\frac{1}{2} E[\langle \mathcal{M} \rangle_\infty - \langle \mathcal{M} \rangle_T \mid \mathcal{F}_T]\right\} \\
&\geq \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\mathcal{M}\|_{\text{BMO}_2}^2\right\} \equiv C_M \\
\text{i.e., } Z_T &\leq C_M^{-1} E[Z_\infty \mid \mathcal{F}_T], \quad Z_\infty \in L^1
\end{aligned}$$

つまり Z は class (D) に属す。従って $Z \in \mathcal{M}_u$ 。

すると $E[Z_\infty] = 1$ 故から, $d\hat{P} \equiv Z_\infty dP$ は new probability measure をなし, $W_t \equiv Z_t^{-1}$ は \hat{P} に関する uniformly integrable martingale となる。このとき, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ に対し

$$Z \in (R_p) \iff W \in (A_q) \text{ w.r.t } \hat{P}.$$

が成立する。これは, 次の関係式から明らかであろう。

$$E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_t}\right)^p \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\frac{Z_\infty}{Z_t} \left(\frac{W_t}{W_\infty}\right)^{p-1} \mid \mathcal{F}_t\right] = \hat{E}\left[\left(\frac{W_t}{W_\infty}\right)^{\frac{1}{q-1}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

ただし, $\hat{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ は, \hat{P} に関する条件付平均である。同様に

$$Z \in (A_p) \iff W \in (R_q) \text{ w.r.t } \hat{P}$$

である。

§ 3. The distance in BMO to H_∞ .

定義 2 $M \in \text{BMO}$ に対し

$$s(M) \equiv \sup\{\alpha \geq 0 : \exists C_\alpha > 0, E[\exp\{\alpha |M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t] \leq C_\alpha, \forall t\}$$

定義より $M \in H_\infty$ ならば $\rho(M) = \infty$ である。

定理 2 (Garrett-Jones [5], Varopoulos [7], Emery [4])

任意の $M \in BMO$ に対し

$$\frac{1}{4d(M, H_\infty)} \leq \rho(M) \leq \frac{4}{d(M, H_\infty)}$$

がなりたつ。ただし, $d(M, H_\infty) \equiv \inf_{N \in H_\infty} \|M - N\|_{BMO}$ 。

左側不等式は簡単だから, 先ずそれを示そう。martingale N が $|N| \leq C$ のとき,

$$E[\exp\{\alpha |M_\infty - M_t|\} | \mathcal{F}_t] \leq e^{2\alpha C} E[\exp\{\alpha |(M-N)_\infty - (M-N)_t|\} | \mathcal{F}_t]。$$

従って $\rho(M-N) \leq \rho(M)$ 。さらに, 補題 1 により上式右辺は,

$$0 \leq \alpha < 1/(4\|M-N\|_{BMO}) \text{ に対し有界となるから, } \frac{1}{4\|M-N\|_{BMO}} \leq \rho(M)。$$

故に, $\frac{1}{4d(M, H_\infty)} \leq \rho(M)$ が求まる。

右側不等式を得るためには, 次の補題を要す。

補題 2 S, T を stopping times とし,

$$S \leq T \leq \infty, \quad P(T < \infty | \mathcal{F}_S) \leq c^m \quad (\text{ただし, } 0 < c < 1, m \in \mathbb{N})$$

を仮定するとき, 次の 2 条件を満たす stopping times $R_0,$

R_1, \dots, R_m が存在する:

$$(i) \quad S = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_m = T$$

$$(ii) \quad P(R_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{R_j}) \leq c \quad (j=0, 1, \dots, m-1)$$

(証明) martingale $X_t \equiv P(T < \infty \mid \mathcal{F}_t)$ について, stopping times

$$S_j \equiv \inf\{t \geq S : X_t \geq c^{m-j}\} \quad (j=0, 1, \dots, m)$$

を定める。仮定より $X_S \leq c^m$, $X_T = I_{\{T < \infty\}}$ だから, 先ず

$$S \leq S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_m \leq T$$

がある。さらに S_k の定義より

$$c^{m-j-1} P(S_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{S_j}) \leq E[X_{S_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{S_j}] = X_{S_j} \leq c^{m-j},$$

従って $P(S_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{S_j}) \leq c$ 。そこで $R_0 = S$, $R_j = S_j$ ($1 \leq j \leq m-1$)

$R_m = T$ とおけば

$$P(R_1 < \infty \mid \mathcal{F}_{R_0}) = E[P(S_1 < \infty \mid \mathcal{F}_{S_0}) \mid \mathcal{F}_{R_0}] \leq c \quad (\because R_0 \leq S_0)$$

$$P(R_m < \infty \mid \mathcal{F}_{R_{m-1}}) \leq P(S_m < \infty \mid \mathcal{F}_{S_{m-1}}) \leq c \quad (\because S_m \leq R_m)$$

また, $j=2, 3, m-1$ に対しても, 作り方から当然

$$P(R_j < \infty \mid \mathcal{F}_{R_{j-1}}) = P(S_j < \infty \mid \mathcal{F}_{S_{j-1}}) \leq c$$

が成り立つ。□

定理2の右側不等式の証明: $0 \leq a < \rho(M)$ ならば $a \leq \frac{4}{d(M, H_\infty)}$

を示せば十分である。そのために, 定数 $k > 0$ を

$$E[\exp\{a|M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t] \leq e^{ak} \quad (0 \leq t < \infty)$$

となるように定め, $0 < \varepsilon < 1$, $m > ak/\varepsilon^2$, $b \equiv m\varepsilon/a$ とする。

次に stopping times $T_0 \equiv 0$, $T_{j+1} \equiv \inf\{t \geq T_j : |M_t - M_{T_j}| = b\}$ ($j \geq 0$) を定義すると, $\{T_{j+1} < \infty\} \subset \{|M_{T_{j+1}} - M_{T_j}| = b\}$ 故から

$$\begin{aligned} e^{ab} P(T_{j+1} < \infty | \mathcal{F}_{T_j}) &\leq E[\exp\{a|M_{T_{j+1}} - M_{T_j}|\} | \mathcal{F}_{T_j}] \\ &\leq E[\exp\{a|M_\infty - M_{T_j}|\} | \mathcal{F}_{T_j}] \\ &\leq e^{ak} \end{aligned}$$

従って $P(T_{j+1} < \infty | \mathcal{F}_{T_j}) \leq e^{-a(b-k)} \leq c^m$, 尤も $c \equiv e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)}$.

そこで

$$A^+ = \sum_{j=0}^{\infty} I_{\{M_{T_{j+1}} - M_{T_j} = b\}} I_{[T_{j+1}, \infty[}, \quad A^- = \sum_{j=0}^{\infty} I_{\{M_{T_{j+1}} - M_{T_j} = -b\}} I_{[T_{j+1}, \infty[}$$

とおく。先ず A^+ について, 適当な stopping times $S_n \uparrow$ を用いて

$$A^+ = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[S_n, \infty[} \text{ と表しておく。簡単な計算から各 } n \text{ に対し,}$$

$P(S_{n+1} < \infty | \mathcal{F}_{S_n}) \leq c^m$ があるので, 補題 2 より

$$R_0 = 0, R_n \uparrow, R_{j,m} = S_j \quad (j \geq 1), \quad P(R_{l+1} < \infty | \mathcal{F}_{R_l}) \leq c \quad (l \geq 0)$$

を満たす stopping times R_n が存在する。次に increasing process

$$B^+ \equiv \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} I_{[R_j, \infty[}$$

を考えると, $A^+ \leq B^+ \leq A^+ + 1$ がある。ここで, martingale $N_t^+ \equiv$

$bE[B_\infty^+ | \mathcal{F}_t]$ を定義する。同様にして, A^- から B^-, N^- を定め

$N = N^+ - N^-$ とおく。このとき, $L \equiv M - N \in H_\infty$ となる。実際に

$$\begin{aligned} L_\infty &= M_\infty - b(B_\infty^+ - B_\infty^-) \\ &= \{M_\infty - b(A_\infty^+ - A_\infty^-)\} + b(A_\infty^+ - B_\infty^+) - b(A_\infty^- - B_\infty^-) \end{aligned}$$

定義より, $b|A_\infty^\pm - B_\infty^\pm| \leq b$ (複号同順), さらに

$$b(A_t^+ - A_t^-) - M_t = \sum_{j=0}^{\infty} (M_{T_j} - M_t) I_{\{T_j \leq t < T_{j+1}\}} - M_t I_{\{t < T_1\}}.$$

であるから, $|b(A^+ - A^-) - M| \leq b$. 従って $\|L\| \leq 3b$.

さて次に, B^+ の定義に注意すれば

$$P(B_\infty^+ - B_{R_{j-1}}^+ > \frac{\varepsilon}{m} | \mathcal{F}_{R_j}) = P(R_{j+i} < \infty | \mathcal{F}_{R_j}) \leq c^i$$

故から $\{R_{j-1} < t \leq R_j\}$ 上では

$$E[B_\infty^+ - B_t^+ | \mathcal{F}_t] = E[E[B_\infty^+ - B_{R_{j-1}}^+ | \mathcal{F}_{R_j}] | \mathcal{F}_t] \leq \frac{1}{m(1-c)}.$$

従って $\|N^+\|_{BMO} \leq \frac{2b}{m(1-c)}$. N^- についても同じ評価が得られるから $\|N\|_{BMO} \leq \frac{4b}{m(1-c)}$. 故に: $d(M, H_\infty) \leq \frac{4}{a} \frac{\varepsilon}{1 - e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)}} \rightarrow \frac{4}{a}$

($\varepsilon \rightarrow 0$). \square

例 2 $M_t = B_{t \wedge \tau}$ とおく. 例 1 で述べたように $M \in BMO \setminus H_\infty$.

然し, 任意の $\alpha > 0$ に対し

$$E[\exp\{\alpha |M_\infty - M_t|\} | \mathcal{F}_t] \leq 2e^{\frac{1}{2}\alpha^2}$$

がなりたつので, $\rho(M) = \infty$. このとき定理 2 から $d(M, H_\infty) = 0$.

従って, $M \in \overline{H_\infty} \setminus H_\infty$.

例 3 S を (B_t) と独立な stopping time で, しかも $\{S > t\}$ は \mathcal{F}_t -atom, $P(S \in dt) = e^{-t} dt$ とし, $M_t = B_{t \wedge S}$ とおく. このとき $M \in BMO$, $\rho(M) = \sqrt{2}$ である. 実際には, $\langle M \rangle_t = t \wedge S$ 故から

$$\begin{aligned}
E[(M_\infty - M_t)^2 | \mathcal{G}_t] &= E[(S-t) I_{\{S>t\}} | \mathcal{G}_t] \\
&= \frac{1}{P(S>t)} E[(S-t) : S>t] I_{\{S>t\}} \\
&= e^t \int_t^\infty (x-t) e^{-x} dx \cdot I_{\{S>t\}} \\
&= I_{\{S>t\}}
\end{aligned}$$

従って $\|M\|_{BMO_2} = 1$ 。さらに

$$\begin{aligned}
E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_t)\} | \mathcal{G}_t] &= I_{\{S \leq t\}} + E[\exp\{\alpha(B_S - B_t)\} | \mathcal{G}_t] I_{\{S>t\}} \\
&= I_{\{S \leq t\}} + E[\exp\{\frac{\alpha^2}{2}(S-t)\} \exp\{\alpha(B_S - B_t) - \frac{\alpha^2}{2}(S-t)\} | \mathcal{G}_t] I_{\{S>t\}} \\
&= I_{\{S \leq t\}} + \left\{ \frac{e^{-t}}{P(S>t)} \int_t^\infty e^{\frac{1}{2}\alpha^2 x} \cdot e^{-x} dx \right\} I_{\{S>t\}}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{if } \alpha \geq \sqrt{2} \\ I_{\{S \leq t\}} + \frac{e^{-(1-\frac{\alpha^2}{2})t}}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2} I_{\{S>t\}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2} & \text{if } \alpha < \sqrt{2} \end{cases}$$

$E[\exp\{-\alpha(M_\infty - M_t)\} | \mathcal{G}_t]$ に対しても同じ結果が得られるので $\rho(M) = \sqrt{2}$ となる。このとき定理 2 により

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq d(M, H_\infty) \leq 2\sqrt{2}.$$

従って $M \in BMO \setminus \overline{H}_\infty$ 。

§ 4. H_∞ と (A_p) 条件.

定理 3 $1 < p < \infty$ に対し, 次の (i), (ii) が成立する.

$$(i) \quad d(M, H_\infty) \geq 8(\sqrt{p}+1) \implies Z \notin (A_p)$$

$$(ii) \quad d(M, H_\infty) \geq 8(\sqrt{p}-1) \implies Z \notin (A_p) \text{ or } Z^{(-1)} \notin (A_p).$$

(証明) (i): 対偶を示す. $r = \sqrt{p}/(\sqrt{p}-1)$, $\lambda = \sqrt{p}$ とおけば,

$$\frac{1}{r(p-1)} - \frac{\lambda}{r^2(p-1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} = 1$$

従って, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)^2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\exp\left\{-\frac{1}{r(p-1)}(M_\infty - M_t) + \frac{1}{2r(p-1)}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &\quad \times E\left[\exp\left\{\frac{1}{r(p-1)}(M_\infty - M_t) - \frac{\lambda}{2r^2(p-1)^2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &\leq E\left[\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right]^{\frac{1}{r}} E\left[\frac{Z_\infty^{(\beta)}}{Z_t^{(\beta)}} \middle| \mathcal{F}_t\right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \text{where } \beta = \frac{\lambda}{r(p-1)} \end{aligned}$$

$Z^{(\beta)} \in \mathcal{M}_u$ 故から, 右端辺の第2項は1. さらに $Z \in (A_p)$ ならば, 第1項が有界となる. 従って, 容易に検証できるように, 任意の実数 α に対して

$$E\left[\exp\{\alpha(M_\infty - M_t)\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \leq E\left[\exp\{2\alpha^2(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t)\} \middle| \mathcal{F}_t\right]^{\frac{1}{2}}$$

が成立する. 従って, $E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)}|M_\infty - M_t|\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \leq C_p$. すな

わち, $\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)} \leq \rho(M)$.ところが, (A_p) 条件から $(A_{p-\varepsilon})$ for some $\varepsilon > 0$

があるため, 実際は $\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)} < \rho(M)$. 従って, $d(M, H_\infty) < 8(\sqrt{p}+1)$.

(ii): $t = 2\sqrt{p}/(\sqrt{p}+1)$, $\lambda = 2\sqrt{p}/(\sqrt{p}-1)$ とおけば, $\frac{1}{t} + \frac{1}{\lambda} = 1$ 。さ
うに, $\left\{-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)} + \frac{1}{r(p-1)}\right\} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{p}-1}$, $\frac{\lambda}{r(p-1)} = \frac{1}{(\sqrt{p}-1)^2}$ 。従って
Hölder の不等式を用いて

$$\begin{aligned} & E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}(M_\infty - M_t)\right\} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\exp\left\{-\frac{1}{r(p-1)}(M_\infty - M_t) + \frac{1}{2r(p-1)}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t)\right\} \right. \\ &\quad \times \exp\left\{\left(-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)} + \frac{1}{r(p-1)}\right)(M_\infty - M_t) - \frac{1}{2r(p-1)}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t)\right\} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &\leq E\left[\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t\right]^{\frac{1}{r}} E\left[\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_t^{(\lambda)}} \mid \mathcal{F}_t\right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \text{where } \lambda \equiv -\frac{1}{\sqrt{p}-1}. \end{aligned}$$

$Z^{(\lambda)} \in \mathcal{M}_u$ だから右端の第2項は1。さらに, $Z \in (A_p)$ ならば
第1項は有界となる。同様に,

$$Z^{(-1)} \in (A_p) \implies E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}(M_\infty - M_t)\right\} \mid \mathcal{F}_t\right] \leq C_p \quad (0 \leq t < \infty).$$

従って, Z 及び $Z^{(-1)}$ に対し (A_p) 条件を仮定すれば, $\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)} < \rho(M)$ 。

このとき定理2により $d(M, H_\infty) < 8(\sqrt{p}-1)$ 。これは対偶が成立
することを示している。 \square

注意 (a) (i) に関して, $d(M, H_\infty) < 8$ のときの情報と何も
与えていないという不満が残る。

(b) $Z \in (A_p) \implies Z^{(-1)} \in (A_p)$? は不明である。為分馬鹿目か
らう。

最後に、定理 3 (ii) の逆が成立しないことを例証しておく。

例 4 $1 < p < \infty$ に対し、 $\lambda > 0$ を次のように定める：

$$(*) \quad \left(1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}\right)^2 < p < 1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{16}}$$

さらに、 S を例 3 で与えた stopping time とし、 $M_t \equiv \lambda B_t \wedge S$ と

する。このとき、 $M \in BMO$ 、 $\rho(M) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$ である。ところで (*)

の左側不等式より、 $\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)} < \rho(M)$ がある。従って $d(M, H_\infty) < 8(\sqrt{p}-1)$ 。

他方 (*) の右側不等式より、 $1 \leq \frac{\lambda^2}{2(p-1)^2} + \frac{\lambda^2}{2(p-1)}$ とあるから

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{1}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] &= E\left[\exp\left\{-\frac{\lambda}{p-1}B_S + \frac{\lambda^2}{2(p-1)}S\right\}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{\frac{\lambda^2 S}{2(p-1)^2} + \frac{\lambda^2 S}{2(p-1)}\right\} \exp\left\{-\frac{\lambda}{p-1}B_S - \frac{\lambda^2}{2(p-1)^2}S\right\}\right] \\ &= \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\lambda^2 t}{2(p-1)^2} + \frac{\lambda^2 t}{2(p-1)}\right\} e^{-t} dt \\ &= \infty. \end{aligned}$$

つまり、 $Z \notin (A_p)$ 。

参 考 文 献

- [1] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Herman, Paris 1980.
- [2] C. Dellacherie, P. A. Meyer and M. Yor, Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sémin. Prob. XII, Lecture Notes in Math. 649(1978), 98-113.
- [3] C. Doléans-Dade and P. A. Meyer, Inégalités de normes avec poids, Sémin. Prob. XIII, Lecture Notes in Math. 721(1979), 313-331.
- [4] M. Emery, Le théorème de Garnett-Jones d'après Varopoulos, Sémin. Prob. XV Lecture Notes in Math. 850(1981), 278-284.
- [5] J. B. Garnett and P. W. Jones, The distance in BMO to L^∞ , Ann. Math. 108 (1978), 373-393.
- [6] N. Kazamaki, A characterization of BMO-martingales, Sémin. Prob. X, Lecture Notes in Math. 511(1976), 536-538.
- [7] N. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO, Pacific J. Math. 90(1980), 201-221.